

Andrzej Zajtz

Über eine Eigenschaft der geodätischen Linien auf den Zylinder und Rotationsflächen

1. W sei eine Zylinderfläche mit der rektifizierbaren Kurve

$$(1) \quad k: \quad x_1 = x_1(\sigma), \quad x_2 = x_2(\sigma), \quad x_3 = 0$$

als Leitungskurve und mit den zu der x_3 -Achse parallelen Erzeugenden. Ist σ die Bogenlänge der Kurve k , so sind die Funktionen $x_1(\sigma)$, $x_2(\sigma)$ totalstetig und gilt fast überall

$$(2) \quad [x_1'(\sigma)]^2 + [x_2'(\sigma)]^2 = 1.$$

Nehmen wir σ, h ($h = x_3$) als Koordinatenpaar auf der Fläche W an. Wegen (1) und (2) hat das Bogenelement dieser Fläche fast überall die Gestalt

$$(3) \quad ds^2 = d\sigma^2 + dh^2.$$

Das Integral

$$\left| \int_{PQ} ds \right| \quad (P, Q \in W, ds \text{ hat die Form (3)})$$

stellt also die Länge der rektifizierbaren Bogens \widehat{PQ} auf W dar.

Die Kurven, die dieses Integral minimisieren sind die Geraden

$$(4) \quad C_1\sigma + C_2h + C_3 = 0,$$

wo $C_i = \text{const}$ und $C_1^2 + C_2^2 > 0$.

Im Koordinatensystem $(Ox_1x_2x_3)$ wird also jede geodätische Linie auf W (wir nehmen die variationelle Definition der Geodätischen an, vgl. [1] S. 34) die Gleichung

$$(5) \quad x_1 = x_1(\sigma), \quad x_2 = x_2(\sigma), \quad x_3 = a\sigma + \beta \quad (a, \beta = \text{const})$$

bzw.

$$x_1 = x_2 = \text{const}$$

haben.

Definition. Ein Punkt P der rektifizierbaren Kurve l heisst *nichtregulär*, wenn das Verhältnis der Sehnenlänge PP' zu der Bogenlänge \widehat{PP}' der Kurve l ($P' \in l$) gegen Null konvergiert als $P' \rightarrow P$ d. h.

$$(6) \quad \lim_{P' \rightarrow P} \frac{PP'}{\widehat{PP}'} = 0.$$

Satz 1. Ist der Punkt P ein nichtregulärer Punkt der Leitungskurve k so hat jede über P durchgehende und von k verschiedene Geodätische im Punkte P die Tangente, die mit der Erzeugenden zusammenfällt.

Beweis. Sei $\Delta x_i = x_i(\sigma + \Delta\sigma) - x_i(\sigma)$. Da der Punkt P der Kurve (1) nichtregulär ist, so gilt

$$\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}}{\Delta\sigma} = 0;$$

daher

$$(7) \quad \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta x_1}{\Delta\sigma} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta\sigma} = 0.$$

Γ sei beliebige über P durchgehende und von k verschiedene Geodätische auf W . Dann hat Γ die Gleichung (5) wo $a \neq 0$. Bezeichnen wir mit $\overline{\Delta\Gamma}$ den „Sekantenvektor“ von Γ mit Komponenten $(\Delta x_1, \Delta x_2, a\Delta\sigma)$. Wegen (7) wird

$$\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta\Gamma}}{\Delta\sigma} = (0, 0, a).$$

Die Grenzrichtung des Vektors $\overline{\Delta\Gamma}$ ist also zu der x_3 -Achse parallel. Damit besitzt Geodätische Γ im Punkte P die Tangente, die mit der über P durchgehenden Erzeugenden zusammenfällt, was zu beweisen war.

2. Wir wollen jetzt ähnliche Eigenschaft der Geodätischen auf den schwach regulären Rotationsflächen beweisen.

Sei R eine Rotationsfläche mit dem rektifizierbaren Meridian m und (u, v) als Koordinatenpaar, wobei u die Bogenlänge des Meridians m und v die Abweichung von der festen Meridianebene bezeichnet. Wie E. A. Morozowa in [2] gezeigt hat, haben die Geodätischen auf solcher Fläche lokal die Darstellung $v = v(u)$ mit

$$(8) \quad \frac{dv}{du} = \frac{C}{r(u)\sqrt{r^2(u) - C^2}}$$

wo $C = \text{const}$ und r Radius des Parallelkreises bezeichnet.

Satz 2. Ist P ein nichtregulärer Punkt des Meridians m , so hat jede durch P gehende und von m verschiedene Geodätische im Punkte P die Tangente, die mit der Tangente des durch P gehenden Parallelkreises zusammenfällt.

Beweis. P habe die Koordinaten (u, v) und Γ bezeichne beliebige oben gewählte Geodätische auf R . Es gilt $\overline{PM} = \overline{PQ} + \overline{QM}$, wo die Punkte M, Q

die Koordinaten $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ und $(u + \Delta u, v)$ haben. Bezeichnen wir $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{\Delta u} = \overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{\Delta v} = \overrightarrow{QM}$ ($M \in \Gamma$). Wir haben nun $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Delta u} + \overrightarrow{\Delta v}$ und daher

$$\frac{\overrightarrow{\Delta\Gamma}}{\Delta u} = \frac{\overrightarrow{\Delta u}}{\Delta u} + \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta u}$$

was noch in der Gestalt

$$(9) \quad \frac{\overrightarrow{\Delta\Gamma}}{\Delta u} = \frac{\overrightarrow{\Delta u}}{|\overrightarrow{\Delta u}|} \frac{|\overrightarrow{\Delta u}|}{\Delta u} + \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta v} \frac{\Delta v}{\Delta u}$$

geschrieben werden kann.

Konvergiert Δu gegen 0 so wird:

a) $\frac{|\overrightarrow{\Delta u}|}{\Delta u} \rightarrow 0$, denn P ein nichtregulärer Punkt des Meridians ist.

b) $\frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta v}$ konvergiert gegen den Tangentenvektor \vec{t}_2 des Parallelkreises im P .

(Vektor $\overrightarrow{\Delta v}$ nach dem Richtungssinn konvergiert, da wegen (8) dv/du ständig von Null verschieden ist und die Geodätische nicht von einer auf andere Seite des durch P gehenden Meridians „springt“).

$$c) \quad \frac{\Delta v}{\Delta u} \rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{C}{r\sqrt{r^2 - C^2}} \neq 0.$$

Es folgt hieraus

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta\Gamma}}{\Delta u} = \frac{C}{r\sqrt{r^2 - C^2}} \cdot \vec{t}_2 \quad (C \neq 0).$$

Die Geodätische Γ hat also im Punkte P die Tangente, die mit der zum Parallelkreise gemeinsam ist.

Bemerkung. In Sätzen 1, 2 kann P als ein Randpunkt der Geodätischen (die geht von P aus) betrachtet werden und Behauptung betrifft dann die Halbtangente.

Folgerung. Auf den Rotationsflächen mit dem rektifizierbaren Meridian, der nichtreguläre Punkte hat, gilt nicht die Clairaut'sche Regel

$$r \sin \delta = C$$

wo δ den Winkel zwischen der Geodätischen und dem Meridian bezeichnet und $C = \text{const}$ (C ist dieselbe Konstante wie in (8)).

Tatsächlich, ist $C \neq 0$ so wird in den nichtregulären Punkten $\delta = \pi/2$ und daher $r \sin \delta = r$ unabhängig von dem Wert des Parameters C der gegebenen Geodätischen entspricht.

Die Clairaut'sche Regel gilt ebenfalls nicht, wenn der Meridian einen Punkt hat, in dem das Verhältnis der Sehnenlänge PP' zu der Bogenlänge \widehat{PP} des Meridians gegen eine Zahl μ , $0 < \mu < 1$ konvergiert. Es gilt nämlich dann

$$r \sin \delta = \frac{Cr}{\sqrt{\mu^2 r^2 + C^2(1 - \mu^2)}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nicht konstant bei der festen Wert C .

Beispiel. Die im Satze 2 erwähnte Eigenschaft haben die Geodätischen auf der Rotationsfläche mit dem Meridian

$$r(x_3) = |x_3|^a \sin \frac{1}{x_3} + 1 \quad \text{für } x_3 \neq 0$$

$$r(0) = 1$$

wo $3/2 < a < 2$.

Aus den Sätzen 1 und 2 folgt, dass die Geodätischen auf den Rotationsflächen und Zylinderflächen, unter gewissen Bedingungen nur in zwei Richtungen von einem Punkte ausgehen können, und dabei in einer der Richtungen die Anzahl dieser Geodätischen unendlich ist. Diese Ergebnisse kann man als einen Beitrag zur Lösung der allgemeiner Frage über die Möglichkeit der Ausführung der Geodätischen von gegebenem Punkte in gegebener Richtung behandeln. Zum Beispiel für die konvexe Fläche gilt es: *Für jeden Punkt einer konvexen Fläche hat die Menge der Richtungen in denen von diesem Punkte keine Geodätischen (Kürzesten) ausgehen, das Winkelmaß Null.* ([1] S. 213).

In unseren Fällen hat diese Menge das volle Winkelmaß 2π .

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. D. Aleksandrow, *Die innere Geometrie der konvexen Flächen*, Berlin 1955.
 [2] E. A. Морозова, *Кратчайшие линии на поверхностях вращения со спрямляемым меридианом*, Доклады Акад. Наук СССР 84 (1952), 1135—1138.