ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
Nr LXXVII PRACE MATEMATYCZNE. ZESZYT 9 1963

Franciszek Bierski

Über die Konvergenz einer gewissen Folge

Es sei im topologischen Raum R, dessen Punkte wir mit $p_1, p_2, \ldots$ bezeichnen, eine reelle und stetige Funktion $\omega(p_1, \ldots, p_l)$ definiert, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\omega(p_1, \ldots, p_l) \geqslant 0\,, \qquad \omega(p_{i_1}, \ldots, p_{i_l}) = \omega(p_1, \ldots, p_l)$$

wo $(i_1, \ldots, i_l)$ eine beliebige Permutation der Indexen $(1, \ldots, l)$ ist. Es sei in R eine kompakte Menge E gegeben; weiter sei $n(\geqslant l)$ eine ganze positive Zahl und $p^{(n)} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ ein beliebiges System von n Punkten der Menge E. Bezeichnen wir durch $V(p^{(n)})$, $\Delta^{j_1}(p^{(n)})$, $\Delta^{j_1j_2}(p^{(n)})$, $\Delta^{j_1j_2j_3}(p^{(n)})$ folgende Produkten:

$$V(p^{(n)}) = \prod_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_l\leqslant n} \omega(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_l})$$

$$\Delta^{j_1}(p^{(n)}) = \prod_{1\leqslant i_2<i_3<\ldots<i_l\leqslant n} \omega(p_{j_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_l})$$

$$\Delta^{j_1j_2}(p^{(n)}) = \prod_{1\leqslant i_3<\ldots<i_l\leqslant n} \omega(p_{j_1}, p_{j_2}, p_{i_3}, \ldots, p_{i_l})$$

$$\Delta^{j_1j_2j_3}(p^{(n)}) = \prod_{1\leqslant i_4<\ldots<i_l\leqslant n} \omega(p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}, p_{i_4}, \ldots, p_{i_l})\,.$$

Daraus ergeben sich folgende Identitäten:

$$\Delta^{j_1}(p^{(n)}) = \Delta^{j_1j_2}(p^{(n)}) \cdot \Delta^{j_1}(p_1, \ldots, p_{j_2-1}, p_{j_2+1}, \ldots, p_n) \tag{1}$$

$$\Delta^{j_1j_2}(p^{(n)}) = \Delta^{j_1j_2j_3}(p^{(n)}) \cdot \Delta^{j_1j_2}(p_1, \ldots, p_{j_3-1}, p_{j_3+1}, \ldots, p_n). \tag{2}$$

Bezeichnen wir durch $v_n(E)$, $d'_n(E)$, $d''_n(E)$ folgende Mittel:

$$v_n(E) = [\sup_{p^{(n)}\in E} V(p^{(n)})]^{1/\binom{n}{l}} = [V_n(E)]^{1/\binom{n}{l}}.$$

$$d'_n(E) = \{\sup_{p^{(n)}\in E} [\min_{j_1} \Delta^{j_1}(p^{(n)})]\}^{1/\binom{n-1}{l-1}} = [\Delta'_n(E)]^{1/\binom{n-1}{l-1}}$$

$$d''_n(E) = \{\sup_{p^{(n)}\in E} [\min_{j_2}(\max_{j_1} \Delta^{j_1j_2}(p^{(n)})]\}^{1/\binom{n-2}{l-2}} = [\Delta''_n(E)]^{1/\binom{n-2}{l-2}}.$$

Es ist bekannt, dass die Folgen $\{v_n(E)\}$, $\{d'_n(E)\}$ konvergent sind [1]. Prof. F. Leja stellt folgendes Problem: ist die Folge $\{d''_n(E)\}$ konvergent?

Man beweise folgenden Satz:

Wenn $l = 3$ dann ist die Folge $\{d''_n(E)\}$ konvergent.

Weil die Menge E kompakt ist, gibt es in E ein System von n Punkten $q^{(n)} = \{q_1, \ldots, q_n\}$ für welches

$$\Delta''_n(E) = \sup_{p^{(n)} \in E} \left[\min_{j_2}\left(\max_{j_1} \Delta^{j_1 j_2}(p^{(n)})\right)\right] = \Delta^{ik}(q^{(n)})$$

wo i, k gewisse bestimmte Indexen sind.

Ist dann ε eine beliebige positive Zahl, so gibt es ein System von $(\mu+\nu)$ Punkten $p^{(\mu+\nu)}$ in der Menge E mit folgender Eigenschaft

$$\Delta''_{\mu+\nu}(E) - \varepsilon \leqslant \min_{j_2}[\max_{j_1} \Delta^{j_1 j_2}(p^{(\mu+\nu)})]\,. \tag{3}$$

Man kann annehmen, dass $\max\limits_{j_1} \Delta^{j_1 j_2}(p^{(\mu+\nu)})$ für $j_1 = \mu+1$ erreicht ist, dann

$$\min_{j_2}\left(\max_{j_1} \Delta^{j_1 j_2}(p^{(\mu+\nu)})\right) \leqslant \Delta^{\mu+1, j_2}(p^{(\mu+\nu)})\,. \tag{4}$$

Aus dem System der Punkte $p^{(\mu+\nu)} = \{p_1, \ldots, p_\mu, p_{\mu+1}, \ldots, p_{\mu+\nu}\}$ wählen wir $(\nu-1)$ solcher Punkte $p_{i_2}, \ldots, p_{i_\nu}$, dass der Produkt $\Delta^{\mu+1}(p_{\mu+1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_\nu})$ möglichst der grösste sei; man kann die Punkte so numerieren, dass $\Delta^{\mu+1}(p_{\mu+1}, \ldots, p_{\mu+\nu})$ der grösste sei; dann haben wir folgende Ungleichungen:

$$\Delta^{\mu+1}(p_{\mu+1}, \ldots, p_{\mu+\nu}) \geqslant \Delta^{\mu+1}(p_{\mu+1}, \ldots, p_{k-1}, p_i, p_{k+1}, \ldots, p_{\mu+\nu}) \tag{5}$$

wo

$$k = \mu+2, \ldots, \mu+\nu, \quad i = 1, \ldots, \mu\,.$$

Aus der Identität (1) und der Ungleichung (5) erhalten wir:

$$\Delta^{\mu+1,k}(p_{\mu+1}, \ldots, p_k, \ldots, p_{\mu+\nu}) \cdot \Delta^{\mu+1}(p_{\mu+1}, \ldots, p_{k-1}, p_{k+1}, \ldots, p_{\mu+\nu}) \geqslant$$
$$\geqslant \Delta^{\mu+1,i}(p_{\mu+1}, \ldots, p_{k-1}, p_i, p_{k+1}, \ldots, p_{\mu+\nu}) \cdot \Delta^{\mu+1}(p_{\mu+1}, \ldots, p_{k-1}, p_{k+1}, \ldots, p_{\mu+\nu})$$

und weiter

$$\Delta^{\mu+1,k}(p_{\mu+1}, \ldots, p_k, \ldots, p_{\mu+\nu}) \geqslant \Delta^{\mu+1,i}(p_{\mu+1}, \ldots, p_{k-1}, p_i, p_{k+1}, \ldots, p_{\mu+\nu})\,. \tag{6}$$

Nach der Multiplizierung der beiden Seiten der Ungleichung (6) mit $\Delta^{\mu+1,k,i}(p_{\mu+1}, \ldots, p_k, \ldots, p_{\mu+\nu}, p_i)$ und nach der Anwendung der Identität (2) erhalten wir:

$$\Delta^{\mu+1,k}(p_{\mu+1}, \ldots, p_{\mu+\nu}, p_i) \geqslant \Delta^{\mu+1,i}(p_{\mu+1}, \ldots, p_k, \ldots, p_{\mu+\nu}, p_i)$$

wo

$$i = 1, \ldots, \mu \quad k = \mu+2, \ldots, \mu+\nu\,.$$

Dann ist

$$\Delta''_{\nu+1}(E) \geqslant \min_k \Delta^{\mu+1,k}(p_{\mu+1}, \ldots, p_k, \ldots, p_{\mu+\nu}, p_i) \geqslant \Delta^{\mu+1,i}(p_{\mu+1}, \ldots, p_k, \ldots, p_{\mu+\nu}, p_i)$$

d.h.

$$\Delta''_{\nu+1}(E) \geqslant \Delta^{\mu+1,i}(p_{\mu+1}, \ldots, p_{\mu+\nu}, p_i) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, \mu\,. \tag{7}$$

Die rechte Seite (4) kann man für $l = 3$ folgend vorstellen:

$$\Delta^{\mu+1,i}(p^{(\mu+\nu)}) = \Delta^{\mu+1,i}(p_1, \ldots, p_{\mu+1})\,\Delta^{\mu+1,i}(p_{\mu+1}, \ldots, p_{\mu+\nu}, p_i) \tag{8}$$

für jeder $i = 1, \ldots, \mu$.

Auf Grund der Ungleichungen (3), (4), (7) und (8) erhalten wir

$$\Delta''_{\mu+\nu}(E) - \varepsilon \leqslant \min_{(i)} \Delta^{\mu+1,i}(p^{(\mu+\nu)}) \leqslant \min_{(i)} \Delta^{\mu+1,i}(p_1, \ldots, p_{\mu+1})\,\Delta^{\mu+1,i}(p_{\mu+1}, \ldots, p_{\mu+\nu}, p_i) \leqslant$$
$$\leqslant \min_{(i)} \Delta^{\mu+1,i}(p_1, \ldots, p_{\mu+1})\Delta''_{\nu+1}(E) \leqslant \Delta''_{\mu+1}(E) \cdot \Delta''_{\nu+1}(E)\,.$$

Also gibt es folgende Ungleichung $\Delta''_{\mu+\nu}(E) - \varepsilon \leqslant \Delta''_{\mu+1}(E) \cdot \Delta''_{\nu+1}(E)$ für jedes $\varepsilon > 0$, d.h.

$$\Delta''_{\mu+\nu}(E) \leqslant \Delta''_{\mu+1}(E) \cdot \Delta''_{\nu+1}(E)\,. \tag{9}$$

Nach Anwendung des nachherstehenden Lemma aus der Ungleichung (9) folgt, dass $\lim_{n\to\infty} [\Delta''_n(E)^{1/(n-2)} = \lim_{n\to\infty} d''_n(E)$ existiert und endlich ist.

Lemma. *Wenn die Folge positiver Zahlen* $\{a_n\}$ *folgende Bedingung erfüllt:*

$$a_{\mu+\nu} \leqslant a_{\mu+1}a_{\nu+1} \qquad \mu, \nu = 2, 3, \ldots$$

dann ist die Folge $\{\sqrt[n-2]{a_n}\}$ *konvergent zur endlichen Grenze.*

Der Beweis des Lemma ist analogisch zum Beweise folgendem Lemma: *Wenn die Folge positiver Zahlen* $\{a_n\}$ *folgende Bedingung erfüllt:*

$$a_{\mu+\nu} \leqslant a_\mu\, a_\nu \qquad \mu, \nu = 1, 2, \ldots$$

dann ist die Folge $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ *konvergent zur endlichen Grenze* ([2], s. 257).

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Leja, *Une généralisation de l'écart et du diamètre transfini d'un ensemble*, Ann. Soc. Pol. de Math. 22 (1949), 35—42.

[2] F. Leja, *Teoria funkcji analitycznych*, Warszawa 1957.