ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

Nr LXXVII PRACE MATEMATYCZNE, ZESZYT 9 1963

Stanisław Gołąb

Sur une condition suffisante (et nécessaire) pour qu'un espace riemannien à trois dimensions soit euclidien

Le fait que le fort développement de la géométrie de Riemann n'a commencé qu'avec la création de la théorie de la relativité avait comme conséquence que les espaces riemanniens à quatre dimensions ont été plus profondément étudiés que ceux à trois dimensions (les espaces à deux dimensions étaient depuis longtemps étudiés parce qu'ils se laissent réaliser comme surfaces plongeables dans l'espace euclidien à trois dimensions). C'est probablement pour cette raison qu'un théorème fondamental de la géométrie de Riemann à trois dimensions n'a pas été — il me semble — remarqué jusqu'au temps dernier.

Si nous désignons par g_{ik} le tenseur métrique d'un espace de Riemann V_n et par $R_{ijk}{}^{l}$ resp. R_{jk} le tenseur de courbure et le tenseur de Ricci

$$R_{jk} = R_{ijk}{}^{i}\,, \tag{1}$$

alors l'espace étant euclidien, c'est-à-dire $R_{ijk}{}^{l} = 0$, le tenseur R_{jk} disparaît aussi. Réciproquement, la relation $R_{jk} = 0$ n'entraîne pas en général la relation $R_{ijk}{}^{l} = 0$. Pour $n = 3$ la situation est exceptionnelle parce que le nombre de composantes indépendantes du tenseur de Ricci est égal à $n(n+1)/2$, celui du tenseur de courbure est égal à $n^2(n^2-1)/12$, donc pour $n = 3$ ces deux tenseurs possèdent le même nombre 6 de composantes indépendantes.

Il y a quelques ans, j'ai trouvé pour V_3 l'implication suivante

$$R_{jk} = 0 \Rightarrow R_{ijk}{}^{l} = 0\,. \tag{2}$$

Bien que ce théorème ne soit pas mentionné dans les manuels de Eisenhart et de Schouten, je n'avais pas publié sa démonstration en supposant qu'il est quand même connu. Mais, en trouvant tout récemment dans le livre de A. Z. Pietrov ([1], p. 37, l'exercice 3) la formule

$$R_{ijkl} = -g_{il}R_{jk} + g_{ij}R_{kl} - g_{jk}R_{il} + g_{kl}R_{ij} + \frac{R}{2}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})\,,$$

où R désigne la courbure scalaire de l'espace,

$$R = R_{jk} g^{jk} ,$$

dont la relation (2) est une conséquence immédiate ($R_{jk} = 0 \Rightarrow R = 0$), je me suis assuré que le théorème envisagé n'a pas été en réalité remarqué. Presque simultanément la démonstration de ce théorème a été publiée dans la deuxième édition du livre de W. A. Fok ([2], „Supplément" p. 549—551). Cette démonstration est basée sur l'introduction d'un tenseur contravariant symétrique A^{jk} remplissant les relations

$$E_{pij} \cdot E_{qkl} \cdot A^{pq} = R_{ijkl} ,$$

où E_{pij} est le tenseur antisymétrique bien connu

$$E_{pij} = \sqrt{g}\, n_{pij}$$

et

$$g = \det(g_{ik}) \neq 0 ,$$

$$n_{pij} = \begin{cases} 1 \text{ si } p, i, j \text{ est une permutation paire des nombres } 1, 2, 3 \\ -1 \text{ si } p, i, j \text{ est une permutation impaire des nombres } 1, 2, 3 \\ 0 \text{ si au moins deux des indices } p, i, j \text{ sont égaux.} \end{cases}$$

Au moyen du tenseur A^{ik} l'auteur déduit la formule

$$R_{ijkl} = \left(R^{pq} - \frac{R}{2} g^{pq}\right) E_{pij} E_{qkl} , \qquad (R^{pq} = R_{st} g^{sp} g^{tq}) ,$$

d'où le théorème (2) résulte immédiatement.

Ce théorème est — comme j'ai déjà remarqué — une conséquence simple de la formule de Pietrow; l'auteur ne donne pas cependant de démonstration de sa formule en la laissant au lecteur.

J'expose ci-dessous une esquisse de ma propre démonstration. Comme

$$R_{ijkl} = R_{ijk}{}^{m} g_{ml} , \qquad R_{ijk}{}^{l} = R_{ijkm} g^{lm} , \tag{3}$$

on a

$$R_{ijk}{}^{l} = 0 \Longleftrightarrow R_{ijkl} = 0 . \tag{4}$$

En exprimant les composantes $R_{ijk}{}^{l}$ par R_{ijkl} au moyen de la deuxième des relations (3) nous écrivons (1) dans la forme équivalente

$$R_{jk} = R_{ijkm} g^{im}$$

ou

$$g^{im} R_{ijkm} = R_{jk} . \tag{5}$$

Traitons (5) comme un système d'équations linéaires où les R_{jk} sont donnés (les coefficients g^{im} sont aussi donnés) et les R_{ijkm} sont inconnus. Le nombre d'inconnus est égal à 6. Le nombre d'équations indépendantes est aussi égal à 6. Un calcul simple (mais un peu long) montre que le déterminant D des coefficients (après un arrangement convenable des équations et des inconnues) est donné par la formule

$$D = \frac{2}{g^2}.$$

De là il résulte que sous l'hypothèse que tous les R_{jk} sont égaux à zéro, le système (5) n'a que la solution $R_{ijkm} = 0$, d'où, en vertu de (4), nous tirons la conclusion $R_{ijk}{}^{l} = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] А. З. Петров, *Пространства Эйнштейна*, Москва 1961.

[2] В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, Москва 1961.