ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
Nr LXXVII PRACE MATEMATYCZNE. ZESZYT 9 1963

Andrzej Lasota

Un problème aux limites pour l'équation différentielle du second ordre

1. En 1955 C. Corduneanu [1] a démontré l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation différentielle

$$x'' = f(t, x, x') \tag{1}$$

assujettie aux conditions aux limites suivantes

$$x'(0) = r, \quad x(a) + hx'(a) = s. \tag{2}$$

Le problème (1), (2) a été étudié aussi par Z. Opial [3] qui a établi un théorème plus général.

Dans ces études les auteurs admettent que la fonction $f(t, x_0, x_1)$, le second membre de l'équation (1), possède les dérivées f_{x_0} et f_{x_1} continues satisfaisant à certaines conditions supplémentaires. Cependant pour la question d'existence de solutions du problème (1), (2) ce n'est pas la régularité de la fonction f qui s'avère essentielle mais l'ordre de croissance par rapport aux variables x_0 et x_1.

Dans la présente note nous allons établir quelques théorèmes d'existence de solutions de (1), (2) sans l'hypothèse de l'existence des dérivées f_{x_0} et f_{x_1}.

2. On dit qu'une fonction $f(t, x_0, x_1)$ satisfait dans l'ensemble

$$\pi: \qquad 0 \leqslant t \leqslant a, \quad -\infty < x_0, x_1 < +\infty$$

aux *conditions de Carathéodory* si pour tout $t \in \langle 0, a\rangle$ elle est continue par rapport au couple (x_0, x_1) et pour tout couple (x_0, x_1) est mesurable par rapport à t. Toute fonction $x(t)$ pour laquelle la dérivée $x'(t)$ est absolument continue et la relation

$$x''(t) = f\big(t, x(t), x'(t)\big)$$

a lieu presque partout dans $\langle 0, a\rangle$ s'appelle la *solution au sens de Carathéodory* de l'équation (1).

Théorème 1. *Soit $f(t, x_0, x_1)$ une fonction satisfaisant dans l'ensemble π aux conditions de Carathéodory et à l'inégalité*

$$|f(t, x_0, x_1)| \leqslant L(t) + M|x_0| + K|x_1| \tag{3}$$

où la fonction $L(t)$ est non-négative et sommable dans $\langle 0, a\rangle$ et M, K désignent des constantes non-négatives.

Supposons de plus que la solution $w(t)$ de l'équation

$$w' = w^2 + Kw + M \tag{4}$$

satisfaisant à la condition

$$w(0) = 0 \tag{5}$$

soit définie dans $\langle 0, a\rangle$ et telle que $|h|w(t) < 1$.

Il existe dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ une solution au moins au sens de Carathéodory du problème (1), (2).

Démonstration. En vertu d'un théorème général sur l'existence de solutions des équations différentielles ordinaires ([2], th. 4) il suffit de montrer que pour tout couple de fonctions mesurables $|m(t)| \leqslant M$, $|k(t)| \leqslant K$ le problème homogène

$$x'' = m(t)x + k(t)x' \tag{6}$$

$$x'(0) = 0\,, \qquad x(a) + hx'(a) = 0 \tag{7}$$

a la solution unique $x(t) \equiv 0$.

Supposons qu'une solution $x(t)$ du problème (6), (7) ne s'annule pas identiquement dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$. Désignons par c le plus petit nombre pour lequel on a

$$x(c)\big(x(c) + hx'(c)\big) = 0\,. \tag{8}$$

On a $c > 0$. En effet, si l'on avait $c = 0$, de (7) il viendrait $x(0)\big(x(0) + hx'(0)\big) = x^2(0) = 0$ ce qui signifierait que la fonction $x(t)$, comme solution de l'équation homogène (6) satisfaisant au point $t = 0$ aux conditions initiales $x' = x = 0$, est identiquement nulle. De même on démontre que $x'(c) \neq 0$ et $x(0) \neq 0$.

En vertu de (8), il en résulte que la fonction $u(t) = x'(t)/x(t)$ définie dans l'intervalle $\langle 0, c)$ satisfait ou bien à la condition

$$\lim_{t\to c} |u(t)| = \infty \qquad \big(\text{si } x(c) = 0\big)$$

ou bien

$$h \lim_{t\to c} u(t) = -1 \qquad \big(\text{si } x(c) \neq 0\big)\,.$$

D'après (6) la fonction $u(t)$ satisfait à l'équation de Riccati

$$u' = u^2 + k(t)u + m(t)\,, \qquad |k(t)| \leqslant K\,,\ |m(t)| \leqslant M$$

et, tenant compte de (7), à la condition initiale $u(0) = 0$. D'après (4) et (5) il en vient que dans tout l'intervalle $\langle 0, c)$ on a l'inégalité $|u(t)| \leqslant w(t)$ et, par conséquent, ou bien

$$\lim_{t\to c} w(t) = \infty\,,$$

ou bien

$$|h|\limsup_{t\to c} w(t) \geqslant 1$$

ce qui est en contradiction ou bien avec l'hypothèse que la fonction $w(t)$ est continue dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ $(c \leqslant a)$, ou bien avec l'hypothèse qu'elle y satisfait à l'inégalité $|h|w(t) < 1$.

Remarque 1. On peut remplacer l'inégalité (3) par deux conditions suivantes

$$(9) \qquad \begin{gathered} |f(t, x_0, x_1) - f(t, y_0, y_1)| \leqslant M|x_0 - y_0| + K|x_1 - y_1| \\ \int_0^a |f(t, 0, 0)|\,dt < \infty . \end{gathered}$$

Dans ce cas il existe une et seulement ~~une~~ solution de l'équation (1) satisfaisant aux conditions (2).

En effet, comme les conditions (9) impliquent (3), l'existence d'une telle solution résulte du théorème 1. D'autre part soient $x_i(t)$ $(i = 1, 2)$ deux solutions du problème (1), (2). La fonction $v(t) = x_1(t) - x_2(t)$ satisfait à l'inégalité

$$|v''(t)| = |f(t, x_1, x_1') - f(t, x_2, x_2')| \leqslant M|v(t)| + K|v'(t)|$$

et, par conséquent,

$$v''(t) = M\theta(t)v(t)\operatorname{sgn} v(t) + K\theta(t)v'(t)\operatorname{sgn} v'(t)$$

où

$$\theta(t) = \begin{cases} v''(t)\big(M|v(t)| + K|v'(t)|\big)^{-1} & \text{pour} \quad M|v(t)| + K|v'(t)| \neq 0 \\ 0 & \text{pour} \quad M|v(t)| + K|v'(t)| = 0 . \end{cases}$$

On a aussi

$$v'(0) = 0 , \qquad v(0) + hv'(0) = 0 .$$

Comme $|\theta(t)| \leqslant 1$, il en résulte que $v(t) \equiv 0$ dans $\langle 0, a\rangle$.

3. Dans ce qui précède nous avons supposé que le second membre de l'équation (1) satisfait aux inégalités (3) ou (9). Ces inégalités signifient que la fonction f ne croît pas trop vite à mesure que $|x_0| + |x_1| \to \infty$. Maintenant nous allons nous occuper du cas où l'on suppose seulement que la fonction $f(t, x_0, x_1)$ est continue.

Théorème 2. *Soit $f(t, x_0, x_1)$ une fonction définie et continue dans l'ensemble*

$$\pi: \qquad 0 \leqslant t \leqslant a \qquad -\infty < x_0, x_1 < +\infty$$

et soient r_0, s_0, h_0 des nombres arbitraires non-négatifs.

Il existe un nombre $d_0 \in (0, a\rangle$ tel que, quels que soient $0 < d \leqslant d_0$, $|r| \leqslant r_0$, $|s| \leqslant s_0$, $|h| \leqslant h_0$, l'équation (1) a dans l'intervalle $\langle 0, d_0\rangle$ au moins une solution $x(t)$ satisfaisant aux conditions

$$(10) \qquad x'(0) = r , \qquad x(d) + hx'(d) = s$$

La démonstration du théorème base sur le théorème de Schauder sur le point invariant des transformations continues.

Considérons la fonction $N(q, d, r, s, h)$ définie par les formules suivantes

$$N(q, d, r, s, h) = q - \max_{\substack{0 \leqslant t \leqslant d \\ |x_i| \leqslant \omega_i}} |f(t, x_0, x_1)|$$

(11) $$\omega_0 = (r + \tfrac{1}{2} qd + hq) d + rh + s, \quad \omega_1 = qd + r.$$

Il est facile de voir que la fonction N est continue. En posant

$$q_1 = 1 + \max_{\substack{|x_0| \leqslant r_0 h_0 + s_0 \\ |x_1| \leqslant r_0}} |f(0, x_0, x_1)|$$

on obtient

$$N(q_1, 0, r_0, s_0, h_0) = 1.$$

Il en vient qu'il existe un nombre $d_1 \in (0, a\rangle$ tel que $N(q_1, d_1, r_0, s_0, h_0) \geqslant 0$.

Désignons par d_0 un nombre arbitraire appartenant à $(0, a\rangle$ pour lequel il existe un $q_0 \geqslant 0$ tel que

(12) $$N(q_0, d_0, r_0, s_0, h_0) \geqslant 0.$$

Par exemple on peut admettre $d_0 = d_1$. Nous supposons dans la suite que les nombres d, r, s, h sont fixés et tels que

(13) $$0 < d \leqslant d_0, \quad |r| \leqslant r_0, \quad |s| \leqslant s_0, \quad |h| \leqslant h_0.$$

Soit C l'espace fonctionel de fonctions $z(t)$ continues dans l'intervalle $\langle 0, d_0\rangle$ muni de la norme habituelle

$$||z|| = \max_{\langle 0, d_0\rangle} |z(t)|.$$

Considérons dans l'espace C l'application $\tilde{z} = T(z)$ définie par la formule

(14) $$\tilde{z}(t) = f\big(t, x_z(t), x_z'(t)\big), \quad 0 \leqslant t \leqslant d_0$$

où

(15) $$x_z(t) = \int_d^t du \int_0^u z(v)\, dv - h \int_0^d z(u)\, du + r(t - d - h) + s.$$

On peut facilement vérifier que la fonction $x_z(t)$ satisfait dans l'intervallé $\langle 0, d_0\rangle$ à l'équation

(16) $$x_z''(t) = z(t)$$

et aux conditions (10). Il en vient que tout point invariant de l'application T donne à l'aide de (15) une solution du problème (1), (10). Donc, pour achever la démonstration il suffit de montrer que T admet un point invariant au moins. L'existence d'un tel point résulte du théorème de Schauder car, comme nous allons démontrer: 1° la boule $B = \{z(t) : ||z|| \leqslant q_0\}$ contient $T(B)$, 2° l'ensemble $T(B)$ est relativement compact dans C, 3° l'application T est continue dans C.

En effet, soit $z(t)$ une fonction arbitraire de B. De (13) et (15) on tire

$$(17)\qquad \begin{aligned} |x_z(t)| &\leqslant \tfrac{1}{2} q_0 d_0 + h q_0 d_0 + r_0(d_0+h) + s_0 \stackrel{df}{=} \sigma_0 \\ |x_z'(t)| &\leqslant q_0 d_0 + r_0 \stackrel{df}{=} \sigma_1 \end{aligned}$$

En vertu de (11), (12) et (14) il en résulte

$$\left|\widetilde{z}(t)\right| = \left|f\big(t, x_z(t), x_z'(t)\big)\right| \leqslant \max_{\substack{0\leqslant t\leqslant d_0 \\ |x_i|\leqslant \sigma_i}} |f(t, x_0, x_1)| = q_0 - N(q_0, d_0, r_0, s_0, h_0) \leqslant q_0$$

ce qui signifie que $\widetilde{z}(t) \in B$ et, par conséquent, $T(B) \subset B$.

Comme l'ensemble $T(B)$ est borné, pour la démonstration qu'il est relativement compact il suffit de montrer que les fonctions $z(t) \in B$ sont équicontinues. Soit $\delta(\varepsilon)$ le module de continuité de la fonction $f(t, x_0, x_1)$ envisagée pour $0 \leqslant t \leqslant d_0$, $|x_i| \leqslant \sigma_i$ c'est-à-dire

$$\delta(\varepsilon) = \max_{|\varepsilon_i|\leqslant\varepsilon} |f(t+\varepsilon_0, x_0+\varepsilon_1, x_1+\varepsilon_2) - f(t, x_0, x_1)|\,.$$

De (16) et (17) on tire

$$|x_z(t+\varepsilon) - x_z(t)| \leqslant \varepsilon\sigma_1\,, \qquad |x_z'(t+\varepsilon) - x_z'(t)| \leqslant \varepsilon \max_{\langle 0, d_0\rangle} |z(t)| \leqslant \varepsilon q_0\,.$$

Donc, de (14) il résulte

$$\begin{aligned} |\widetilde{z}(t+\varepsilon) - \widetilde{z}(t)| &= \left|f\big(t+\varepsilon, x_z(t+\varepsilon), x_z'(t+\varepsilon)\big) - f\big(t, x_z(t), x_z'(t)\big)\right| \\ &\leqslant \delta\big(\max(\varepsilon, \varepsilon\sigma_1, \varepsilon q_0)\big) \end{aligned}$$

ce qui signifie que les fonctions $\widetilde{z}(t) \in T(B)$ sont équicontinues.

Soient $y(t)$ et $z(t)$ deux fonctions arbitraires de B. En posant $\widetilde{y} = T(y)$, $\widetilde{z} = T(z)$ on a

$$|\widetilde{y} - \widetilde{z}| = |f(t, x_y, x_y') - f(t, x_z, x_z')| \leqslant \delta\big(\max_{\substack{0\leqslant t\leqslant d_0 \\ i=0,1}} |x_y^{(i)}(t) - x_z^{(i)}(t)|\big)\,.$$

D'autre part, de (15) il vient

$$|x_y^{(i)}(t) - x_z^{(i)}(t)| \leqslant \varrho \max_{\langle 0, d_0\rangle} |z(t) - y(t)|\,, \qquad \varrho = d_0(1 + h + \tfrac{1}{2} d_0)\,.$$

Il en résulte enfin

$$|\widetilde{y} - \widetilde{z}| \leqslant \delta(\varrho\,\|y - z\|)$$

ce qui démontre que l'application T est continue.

R e m a r q u e 2. Rappelons la méthode du choix du nombre d_0 — la longueur de l'intervalle $\langle 0, d_0\rangle$ d'existence d'une solution du problème (1), (10): d_0 est un nombre arbitraire appartenant à $(0, a\rangle$ pour lequel il existe un $q_0 \geqslant 0$ tel que $N(q_0, d_0, r_0, s_0, h_0) \geqslant 0$ où la fonction N est donnée par les formules (11).