

Marian Łuczyński

### Sur l'unicité de solution d'un problème aux limites pour une équation aux dérivées partielles du second ordre du type elliptique dans un domaine non borné

1. Supposons que les coefficients  $a_{ik}$ ,  $b_j$ ,  $c$  de l'opérateur linéaire

$$L[u] = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu$$

soient des fonctions continues dans un domaine non borné  $D$  de l'espace euclidien à  $m$  dimensions et que la forme quadratique

$$\sum_{i,k=1}^m a_{ik}(x) \lambda_i \lambda_k$$

soit définie positive pour tout  $x = (x_1, \dots, x_m) \in D$ . Soit  $\{D_n\}$  une suite croissante de domaines bornés,  $D_n \subset D$ ,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$  et tels que l'on ait pour  $S_n = FD_n \setminus FD$  ( $FD$  désigne la frontière de  $D$ ) la relation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(S_n) = +\infty$$

où  $d(S_n)$  est la distance de  $S_n$  à l'origine des coordonnées. Admettons que pour tout  $x \in S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$  il existe une demi-droite  $l(x)$  dirigée vers l'intérieur de  $D_n$  et un voisinage  $U$  de  $x$  tel qu'une partie de  $l$  contenue dans  $U$  soit contenue dans  $D_n$ . Soit enfin

$$\lambda[u] = \alpha \frac{du}{dl} + \beta u$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions définies sur  $S$  et  $\alpha(x) \geq 0$ .

Une solution  $u$  de l'équation  $L[u] = f$  sera dite régulière dans  $D$  si elle est de classe  $C^2$  dans  $D$  et continue dans  $D \cup FD$ .

## 2. Lemme. Si

- (1)  $c(x) \leq 0$  pour  $x \in D$ ,  
 (2)  $\beta(x) \leq \beta_0 < 0$  pour  $x \in S$ ,  $\beta_0$ —const.,

toute solution  $u$  régulière dans  $D$  de l'équation  $L[u] = 0$  telle que

- (3)  $u(x) = 0$  pour  $x \in FD$ ,

- (4)  $\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda[u] = 0$  où  $r = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}$

s'annule identiquement dans  $D$ .

Démonstration. Soit  $\varepsilon$  un nombre positif. De (4) il vient qu'il existe un entier  $N$  tel que

$$|\lambda[u]| \leq |\beta_0| \varepsilon \quad \text{pour } x \in S_n \text{ et } n \geq N.$$

Posons  $v = u - \varepsilon$  et

$$\bar{\lambda}[v] = \bar{\alpha} \frac{dv}{dl} + \bar{\beta}$$

où

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} \alpha & \text{pour } x \in S \\ 0 & \text{pour } x \in FD \end{cases} \quad \bar{\beta} = \begin{cases} \beta & \text{pour } x \in S \\ \beta_0 & \text{pour } x \in FD \end{cases}$$

Remarquons que

- (5)  $L[v] = -\varepsilon c \geq 0$  pour  $x \in D_n$

et

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}[v] &= \lambda[u] - \varepsilon \beta \geq \varepsilon(\beta_0 - \beta) && \text{pour } x \in S_n, n \geq N \\ \bar{\lambda}[v] &= -\beta_0 \varepsilon && \text{pour } x \in FD \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en vertu de (2)

- (6)  $\bar{\lambda}[v] \geq 0$  sur  $FD_n$ ,  $n \geq N$ .

De (1), (2), (5) et (6) en vertu d'un théorème de M. Picoñe ([1], p. 162) il résulte que

$$v \leq 0 \quad \text{pour } x \in D_n, n = N, N+1, \dots$$

c'est-à-dire

$$u \leq \varepsilon \quad \text{pour } x \in D.$$

De façon analogue en introduisant la fonction  $w = u + \varepsilon$  on démontre que  $u \geq -\varepsilon$  dans  $D$ . Cela signifie que  $u = 0$  dans  $D$ .

Remarque. Posons  $L[u] = \partial^2 u / \partial x_1^2 + \partial^2 u / \partial x_2^2$ ,  $D = \{x: r > 1\}$ ,  $D_n = \{x: 1 < r < n\}$ ,  $l(x) = \log r$ ,  $\alpha(x) = 1$ ,  $\beta(x) = -1/r$ . La fonction  $v = \log 1/r$  est une solution

de l'équation  $L[u] = 0$  telle que  $v = 0$  sur  $FD$  et  $\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda[v] = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1 + \log r}{r} = 0$ .

Cet exemple montre que dans le lemme précédent la condition (2) ne peut pas être remplacée par une condition moins restrictive  $\beta(x) < 0$ . Des exemples analogues existent aussi pour  $c < 0$  ou  $m > 2$ .

3. Théorème. *S'il existe une fonction  $W(x)$  de classe  $C^2$  satisfaisant aux conditions*

- (7)  $W(x) > 0$  dans  $D \cup FD$ ,  
 (8)  $L[W(x)] \leq 0$  dans  $D$ ,  
 (9)  $\lambda[W(x)] \leq \beta_0 W$  où  $\beta_0 - \text{const} < 0$ ,

la fonction identiquement nulle est solution unique de l'équation  $L[u] = 0$  satisfaisant aux conditions

- (10)  $u(x) = 0$  sur  $FD$   
 (11)  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lambda[u]}{W} = 0$ .

Démonstration. Soit  $u$  une solution de l'équation  $L[u] = 0$ , régulière et satisfaisant aux conditions (10) et (11).

Introduisons la fonction auxiliaire  $\varphi = u/W$ . La fonction  $\varphi$  est une solution régulière dans  $D$  de l'équation linéaire homogène du type elliptique

$$\bar{L}[\varphi] = L[\varphi W] = 0$$

dans laquelle on a

$$\bar{c} = \frac{1}{W} L[W] \leq 0.$$

On a en plus  $\varphi(x) = 0$  sur  $FD$  et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \alpha \frac{d\varphi}{dl} + \frac{\lambda[W]}{W} \varphi \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lambda[u]}{W} = 0.$$

On a donc, en vertu du lemme,  $\varphi = 0$  dans  $D$ , c'est-à-dire  $u = 0$  dans  $D$ .

4. M. Krzyżański [2] a donné une construction de la fonction  $W(x)$  satisfaisant aux conditions (7), (8) pour des domaines non bornés quelconques dans le cas où le coefficient  $c$  est borné supérieurement par une constante négative et pour des domaines particuliers dans le cas où l'on n'a que  $c \leq 0$ . De façon plus précise:

1°. Si  $c(x) \leq -\gamma < 0$ ,  $\gamma - \text{const.}$ ,  $D$  est l'espace tout entier, on pose

$$W_1(x) = \prod_{j=1}^m \cosh kx_j$$

où  $0 \leq k \leq k_0$ ,  $k_0$  étant la racine positive d'une équation algébrique de degré 2 dont les coefficients dépendent des coefficients de l'équation  $L[u] = 0$ .

2°. Si  $a(x) \leq 0$ ,  $b_m(x) \geq 0$ ,  $a_{mm}(x) \geq a > 0$ ,  $D: -\infty < x_i < +\infty$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ),  $0 < x_m < h$ , on pose

$$W_2(x) = \cos \frac{\pi x_m}{2L} \prod_{j=1}^{m-1} \operatorname{cosh} kx_j$$

où  $L$  est une constante arbitraire  $> h$ ,  $0 \leq k \leq k_0$ ,  $k_0$  étant la racine positive d'une équation quadratique.

3°. Si  $a(x) \leq 0$ ,  $b_m \leq -b < 0$ ,  $b = \text{const}$ ,  $D$  est la demi-espace  $x_m > 0$ , on pose

$$W_3(x) = e^{akx_m} \prod_{j=1}^{m-1} \operatorname{cosh} kx_j, \quad 0 \leq k \leq k_0,$$

$k_0 = k_0(\omega)$  étant une fonction du paramètre  $\omega$ .

En utilisant ces résultats il est facile d'établir des conditions suffisantes pour que les fonctions  $W(x)$  satisfassent aussi à la condition (9).

Comme

$$\frac{dW_1}{dl} = kW \sum_{j=1}^m \operatorname{tgh} kx_j \frac{dx_j}{dl},$$

donc, en vertu de l'inégalité de Cauchy et

$$|\operatorname{tgh} kx_j| < 1, \quad \sum_{j=1}^m \left( \frac{dx_j}{dl} \right)^2 = 1$$

on a

$$\frac{dW_1}{dl} \leq k\sqrt{m}W.$$

De façon analogue

$$\frac{dW_2}{dl} \leq \sqrt{k^2(m-1) + \frac{\pi^2}{4L^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2L}} W$$

ou, en supposant que  $l$  est perpendiculaire à l'axe des  $x_m$

$$\frac{dW_2}{dl} \leq k\sqrt{m-1}W.$$

Pareillement

$$\frac{dW_3}{dl} \leq k\sqrt{m-1+\omega^2}W.$$

Donc, pour que la condition (9) soit satisfaite il suffit que l'on ait

$$k\sqrt{m}\alpha(x) + \beta(x) \leq \beta_0 < 0 \quad \text{dans le cas 1}^\circ,$$

$$k\sqrt{m-1}\alpha(x) + \beta(x) \leq \beta_0 < 0$$

pour  $l$  perpendiculaire à l'axe des  $x_m$ , dans le cas 2<sup>o</sup>, et

$$k\sqrt{m-1+\omega^2}\alpha(x) + \beta(x) \leq \beta_0 < 0 \quad \text{dans le cas 3}^\circ.$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego I*, Warszawa 1957.  
 [2] M. Krzyżański, *Sur le problème de Dirichlet pour l'équation linéaire du type elliptique dans un domaine non borné*, Rend. Acc. Naz. Lincei 4 (8), (1948), p. 408—416.