ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
Nr LXXVII PRACE MATEMATYCZNE. ZESZYT 9 1963

Андрей Шибяк

О некотором геометрическом истолковании уравнений Коши-Римана

В настоящей работе доказывается, что векторные поля, удовлетворяющие уравнениям Коши-Римана можно охарактеризовать посредством параллельного переноса.

Мы рассматриваем двумерное конформное пространство R, т.е. пространство обладающее следующими свойствами:

1. В окрестности каждой точки пространства R можно ввести изотермические координаты (x^1, x^2), так что для основного метрического тензора $g_{\lambda\mu}$ справедливы соотношения

$$g_{11} = g_{22} \overset{\mathrm{df}}{=} g\,, \qquad g_{12} = g_{21} = 0\,. \tag{1}$$

2. Допустимая группа преобразований координат — конформная группа.
3. Для каждой точки пространства R найдется такая окрестность и такая локальная система координат, что в неё $\log g$ является гармонической функцией.

Так как при переходе от системы координат $x^\varkappa$ к системе $x^{\bar\varkappa}$ путём конформного отображения имеем

$$\bar g = g\left[\left(\frac{\partial x^{\bar 1}}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^{\bar 2}}{\partial x^1}\right)^2\right] = g\left[\left(\frac{\partial x^{\bar 1}}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^{\bar 2}}{\partial x^2}\right)^2\right],$$

$$g_{\bar 1\bar 2} = g_{\bar 2\bar 1} = 0\,,$$

то из 1 и 2 следует, что соотношения (1) остаются в силе в любой допустимой системе координат, а из 2 и 3, что $\log g$ всегда гармоническая функция. Примером нетривиального конформного пространства может служить риманова поверхность многозначной аналитической функции.

Теперь мы полагаем

$$\log\sqrt{g} = \sigma\,, \quad \partial_i\sigma = \sigma_i\,, \quad \left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \quad i = 1, 2\,.$$

Вычисляя объект параллельного переноса $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и пользуясь только что введёнными обозначениями, мы получаем

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11} = \sigma_1\,, \qquad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \sigma_2\,, \qquad \Gamma^1_{22} = -\sigma_1\,,\\
&\Gamma^2_{11} = -\sigma_2\,, \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \sigma_1\,, \qquad \Gamma^2_{22} = \sigma_2\,.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Пусть теперь в R задано непрерывно дифференцируемое поле контравариантных векторов (u^1, u^2). Пользуясь формулами (2), легко вывести следующие формулы для параллельного переноса вектора

$$
\begin{aligned}
Du^1 &= du^1 + (\sigma_1 u^1 + \sigma_2 u^2)\,dx^1 + (\sigma_2 u^1 - \sigma_1 u^2)\,dx^2\,,\\
Du^2 &= du^2 - (\sigma_2 u^1 - \sigma_1 u^2)\,dx^1 + (\sigma_1 u^1 + \sigma_2 u^2)\,dx^2\,.
\end{aligned}
$$

Пусть L гладкая жорданова кривая, охватывающая односвязную область Q внутри пространства R. Мы переносим вектор u^λ вдоль этой кривой, начиная от некоторой точки p_0. После возврата в эту же точку мы получим некоторый вектор U^λ, выраженный формулой

$$
U^\lambda - u^\lambda = \int_L Du^\lambda\,.
$$

Из теоремы Грина следует

$$
\begin{aligned}
\int_L Du^1 &= \int_L du^1 + (\sigma_1 u^1 + \sigma_2 u^2)\,dx^1 + (\sigma_2 u^1 - \sigma_1 u^2)\,dx =\\
&= \iint_Q [(\Delta\sigma)\,u^2 - \sigma_1(\partial_1 u^2 + \partial_2 u^1) + \sigma_2(\partial_1 u^2 - \partial_2 u^2)]\,dx^1 dx^2\,,\\
\int_L Du^2 &= \int_L du^2 - (\sigma_2 u^1 - \sigma_1 u^2)\,dx^1 + (\sigma_1 u^1 + \sigma_2 u^2)\,dx^2 =\\
&= \iint_Q [(\Delta\sigma)\,u^1 + \sigma_1(\partial_1 u^1 - \partial_2 u^2) + \sigma_2(\partial_1 u^2 + \partial_2 u^1)]\,dx^1 dx^2\,.
\end{aligned}
$$

Здесь Δ обозначает оператор Лапласа. Но в конформном пространстве $\Delta\sigma = 0$. Рассматривая остальные слагаемые в интегралах правой части, мы приходим к заключению, что имеет место следующая теорема.

Теорема. *Непрерывно дифференцируемое векторное поле в конформном пространстве тогда и только тогда удовлетворяет уравнениям Коши-Римана, когда параллельный перенос вектора этого поля вдоль любой гладкой жордановой кривой дает исходный вектор.*