

Andrzej Zajtz

Über die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen bei der allgemeinen Schraubenlinie

1. Damit eine Raumkurve die Schmieg ebene bzw. eine Torsion besitzt, setzt man bekanntlich voraus, dass sie von der Klasse C^2 bzw. C^3 ist. Im folgenden wird bewiesen, dass man im Falle der Schraubenlinie diese Differenzierbarkeitsvoraussetzungen um eine Klasse herabsetzen kann. Die Ergebnisse werden in zwei nachstehenden Sätzen dargestellt.

Wenn von Schraubenlinie gesprochen wird, dann setzt man immer voraus, dass es sich um allgemeine Schraubenlinien handelt. Die allgemeinen Schraubenlinien definiert man als diejenigen Raumkurven, bei denen sämtliche Tangentenvektoren mit einer vorgegebenen Richtung einen festen Winkel einschliessen.

Die Schmiege ebene einer räumlichen Kurve kann man bekanntlich in vielfacher Weise definieren. Im folgenden werden wir die folgende Definition annehmen: Besitzt die Kurve C in jedem Punkte den Tangenten Vektor \vec{t} so sagen wir, dass die Ebene π_0 die Schmiege ebene der Kurve C im Punkte P_0 darstellt, wenn für jede unendliche Folge der Punkte P_i der Kurve C , die von P_0 verschieden sind und gegen P_0 konvergieren und solche, dass die Vektoren \vec{t}_i und \vec{t}_0 linear unabhängig sind, die Ebenen π_i durch \vec{t}_0 und parallel zu \vec{t}_i gegen π_0 konvergieren.

Die Kurve C sei eine Schraubenlinie. Nach Definition schliesst ihr Tangentenvektor \vec{t} mit einer festen, etwa durch einen Einheitsvektor \vec{v} gegebenen Richtung einen festen Winkel α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) ein. Die orthogonale Projektion der Schraubenlinie auf eine zu Vektor \vec{v} senkrechte Ebene ist eine ebene Kurve, welche wir die Leitungskurve der Schraubenlinie nennen. Weiterhin werden wir die zur C bzw. ihrer Leitungskurve Γ gehörigen Grössen mit lateinischen bzw. griechischen Buchstaben bezeichnen.

2. Satz 1. *Eine Schraubenlinie der Klasse C^1 besitzt im jeden ihrer Punkte eine Schmiege ebene.*

Beweis. Wir können das Koordinatensystem $(0x_1x_2x_3)$ so wählen, dass die positive x_3 -Achse die Richtung des Vektors \vec{v} besitzt. Seien entsprechend $\vec{r}(s)$ und $\vec{\varrho}(s)$ die in so gewählten Koordinatensystem Parameterdarstellungen der Schraubenlinie und ihrer Leitungskurve, wobei s den natürlichen Parameter von C bedeutet.

Den Ortsvektor $\vec{r}(s)$ kann man wie folgt zerlegen:

$$(1) \quad \vec{r}(s) = \vec{\varrho}(s) + \mu(s)\vec{v}.$$

Die Vektorfunktion $\vec{\varrho}(s)$ besitzt die Komponenten $(x_1(s), x_2(s), \text{const})$ und die Funktion $\mu(s)$ ist gleich $x_3(s)$. Damit sind $\vec{\varrho}(s)$ und $\mu(s)$ auch von der Klasse \mathcal{C}^1 . Differenziert man (1) nach der Bogenlänge (das Differenzieren in bezug auf s werden wir mit Strich bezeichnen) so erhält man:

$$(2) \quad \vec{r}'(s) = \vec{\varrho}'(s) + \mu'(s)\vec{v}.$$

Multipliziert man jetzt (2) skalar mit dem Vektor \vec{v} , so ergibt sich $\vec{r}'(s) \cdot \vec{v} = \mu'(s)$, da der Vektor $\vec{\varrho}'(s)$ senkrecht zu \vec{v} ist. Da aber

$$(3) \quad \vec{v}'(s) \cdot \vec{v} = t \cdot \vec{v} = \cos \alpha = \lambda \quad (\lambda \text{ Constans}),$$

so ist $\mu'(s) = \lambda$ und

$$(4) \quad \mu(s) = \lambda s + \delta \quad (\delta \text{ Constans}).$$

Da wir die geraden Linien sowie die ebenen Kurven ausschliessen, so ist λ weder gleich 1 noch 0, also $0 < \lambda < 1$.

Setzen wir dies in (2) ein, so ergibt sich:

$$(5) \quad \vec{t} = \vec{\varrho}'(s) + \lambda \vec{v}.$$

Da $\vec{\varrho}'(s) \cdot \vec{v} = 0$, so ist $|\vec{\varrho}'(s)| = \sqrt{|\vec{t}|^2 - (\lambda \vec{v})^2}$, also $|\vec{\varrho}'(s)| = \sqrt{1 - \lambda^2} = \gamma$. Wegen $0 < \lambda < 1$ haben wir $0 < \gamma < 1$.

Bezeichnen wir mit σ die Bogenlänge der Leitungskurve Γ , so haben wir

$$\sigma(s) = \int_0^s |\vec{\varrho}'(s)| ds = \gamma s.$$

Wir haben weiter

$$(6) \quad \vec{\varrho}'(s) = \frac{d\vec{\varrho}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{ds} = \vec{\tau} \cdot \vec{v},$$

wobei $\vec{\tau}$ den Einheitstangentenvektor der Leitungskurve Γ ist. Schliesslich erhalten wir aus (5) und (6)

$$(7) \quad \vec{t} = \gamma \vec{\tau} + \lambda \vec{v}.$$

Halten wir einen beliebigen Punkt P_0 der Schraubenlinie mit Parameter s_0 fest und setzen wir $\vec{t}_0 = \vec{t}(s_0)$ und $\vec{\tau}_0 = \vec{\tau}(s_0)$. $\{s_i\}$ sei eine beliebige Folge von Parameterwerten die gegen s_0 konvergiert, so dass die den s_i entsprechenden Tangentenvektoren $\vec{t}_i = \vec{t}(s_i)$ mit den Tangentenvektor \vec{t}_0 nicht kollinear sind.

Betrachten wir jetzt die Folge π_i der dem Punkt P_0 enthaltenden und von den Vektoren \vec{t}_i, \vec{t}_0 aufgespannten Ebenen. Sei

$$\vec{m}_i = \frac{\vec{t}_0 \times \vec{t}_i}{|\vec{t}_0 \times \vec{t}_i|}.$$

Es gilt nach (7)

$$\vec{t}_0 \times \vec{t}_i = (\gamma \vec{\tau}_0 + \lambda \vec{v}) \times (\gamma \vec{\tau}_i + \lambda \vec{v}) = \gamma^2 \vec{\tau}_0 \times \vec{\tau}_i + \gamma \lambda (\vec{\tau}_0 - \vec{\tau}_i) \times \vec{v}.$$

Setzen wir

$$\eta_i = \gamma^2 |\vec{\tau}_0 \times \vec{\tau}_i|, \quad \zeta_i = \gamma \lambda |\vec{\tau}_0 - \vec{\tau}_i|, \quad \Delta_i = \text{Det}[\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_i, \vec{v}]$$

und auch $\varepsilon_i = \text{Sgn} \Delta_i$. Es gilt: $\frac{(\vec{\tau}_0 \times \vec{\tau}_i)}{|\vec{\tau}_0 \times \vec{\tau}_i|} = \varepsilon_i \vec{v}$.

Setzen wir weiterhin

$$\vec{w}_i \stackrel{\text{def}}{=} -\varepsilon_i \frac{(\vec{\tau}_0 - \vec{\tau}_i)}{|\vec{\tau}_0 - \vec{\tau}_i|}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \text{Det}(\vec{\tau}_0, \vec{w}_i, \vec{v}) &= \text{Det}(\vec{\tau}_0; \varepsilon_i \text{Vers}(\vec{\tau}_0 - \vec{\tau}_i), \vec{v}) = \\ &= \text{Det}(\vec{\tau}_0, -\varepsilon_i (\vec{\tau}_0 - \vec{\tau}_i), \vec{v}) \cdot \frac{1}{|\vec{\tau}_0 - \vec{\tau}_i|} = \text{Det}(\vec{\tau}_0, +\varepsilon_i \vec{\tau}_i, \vec{v}) \cdot \frac{1}{|\vec{\tau}_0 - \vec{\tau}_i|} = \frac{\varepsilon_i \Delta_i}{|\vec{\tau}_0 - \vec{\tau}_i|}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(8) \quad \text{Sgn Det}(\vec{\tau}_0, \vec{w}_i, \vec{v}) = \text{Sgn}(\varepsilon_i \Delta_i) = \varepsilon_i^2 = 1.$$

Mit obigen Bezeichnungen gilt

$$\begin{aligned} |\vec{t}_0 \times \vec{t}_i| &= \varepsilon_i (\eta_i \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w}_i), \\ |\vec{t}_0 \times \vec{t}_i| &= \sqrt{\eta_i^2 + \zeta_i^2}. \end{aligned}$$

Schliesslich

$$\vec{m}_i = \varepsilon_i \left(\frac{\eta_i}{\sqrt{\eta_i^2 + \zeta_i^2}} \vec{v} + \frac{\zeta_i}{\sqrt{\eta_i^2 + \zeta_i^2}} \vec{v} \times \vec{w}_i \right).$$

Bemerkung: Da $|\vec{t}_0 \times \vec{t}_i| > 0$ ist so folgt hieraus $\eta_i^2 + \zeta_i^2 > 0$. Wir haben $\vec{m}_i = \varepsilon_i \vec{n}_i$ wobei

$$\vec{n}_i = \frac{\eta_i}{\sqrt{\eta_i^2 + \zeta_i^2}} \vec{v} + \frac{\zeta_i}{\sqrt{\eta_i^2 + \zeta_i^2}} \vec{v} \times \vec{w}_i.$$

Die Ebene $\tilde{\pi}_i(P_0, \vec{m}_i)$ ist dieselbe wie die Ebene $\pi_i(P_0, \vec{n}_i)$, für jedes i . Jetzt werden wir den Grenzprozess (für $s_i \rightarrow s_0$) für die Ebenen π_i vornehmen. Die Ebenen π_i konvergieren gegen eine Grenzebene π_0 dann und nur dann, wenn die Folge \vec{n}_i konvergiert.

Es gilt

$$\eta_i = \gamma^2 |\vec{\tau}_0 \times \vec{\tau}_i| = \gamma^2 \sin \theta_i,$$

wobei

$$\theta_i = \sphericalangle(\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_i) \quad \text{und} \quad 0 < \theta_i < \pi.$$

Ähnlich

$$\zeta_i = \gamma \lambda |\vec{\tau}_0 - \vec{\tau}_i| = 2\gamma \lambda \sin \frac{\theta_i}{2}.$$

Daraus folgt weiter

$$\lim_{s_i \rightarrow s_0} \frac{\eta_i}{\zeta_i} = \frac{\gamma}{\lambda}, \quad \lim_{s_i \rightarrow s_0} \frac{\eta_i}{\sqrt{\eta_i^2 + \zeta_i^2}} = \gamma,$$

$$\lim_{s_i \rightarrow s_0} \frac{\zeta_i}{\sqrt{\eta_i^2 + \zeta_i^2}} = \lambda, \quad (\lambda^2 + \gamma^2 = 1).$$

Die Einheitsvektoren \vec{w}_i besitzen eine zu $\vec{\tau}_0$ senkrechte Grenzrichtung und, da sie wegen (8) ständig an derselben Seite der Ebene $\pi(\vec{\tau}_0, \vec{v})$ liegen, müssen sie auch dem Richtungssinn nach konvergieren. Damit existiert

$$\lim_{s_i \rightarrow s_0} \vec{w}_i = \vec{w}_0, \quad \vec{w}_0 \perp \vec{\tau}_0, \quad \vec{w}_0 \perp \vec{v}.$$

und weil $\text{Det}(\vec{\tau}_0, \vec{w}_0, \vec{v}) > 0$ ständig, so folgt $\text{Det}(\vec{\tau}_0, \vec{w}_0, \vec{v}) = 1$. Hieraus folgt, dass der Vektor \vec{w}_0 mit dem Normalenvektor $\vec{\tau}_{(2)}$ der Leitungskurve zusammenfällt.

Folglich konvergiert auch die Vektorfolge \vec{n}_i und es ist

$$(9) \quad \lim_{s_i \rightarrow s_0} \vec{n}_i = \gamma \vec{v} + \lambda \vec{v} \times \vec{\tau}_{(2)}.$$

Im Punkte P_0 existiert also die Schmiegeebene und damit existieren auch die drei zueinander orthogonalen Einheitsvektoren des begleitenden Dreibeines des Schraubenlinie.

Da $\vec{v} \times \tau_{(2)} = -\tau$, ist können wir wegen (9) den Tangentenvektor $\vec{t}_{(1)}$, ($\vec{t}_{(1)} = \vec{t}$), den Hauptnormalenvektor $\vec{t}_{(2)}$ und Binormalenvektor $\vec{t}_{(3)}$, wie folgt darstellen

$$(10) \quad \begin{aligned} \vec{t}_{(1)} &= \gamma \vec{\tau}_{(1)} + \lambda \vec{v} \quad (\tau_{(1)} = \tau) \\ \vec{t}_{(2)} &= \vec{\tau}_{(2)} \\ \vec{t}_{(3)} &= -\lambda \vec{\tau}_{(1)} + \gamma \vec{v}. \end{aligned}$$

3. Satz 2. In allen Punkten, in denen die Schraubenlinie endliche Krümmung besitzt, hat sie auch eine Torsion und für alle diesen Kurvenpunkte ist das Verhältnis der Torsion zu der Krümmung, wenn die letzte nicht verschwindet, konstant.

Beweis. Unter Beibehaltung der vorherigen Bezeichnungen, bezeichnen wir noch mit k_1 bzw. k_2 die erste bzw. zweite Krümmung (Torsion) der Schraubenlinie.

Insbesondere gelten die Beziehungen (10). P_0 sei ein beliebiger Punkt der Schraubenlinie, in welchem sie endliche Krümmung hat. $\beta = \sphericalangle(\vec{t}_{(3)}, \vec{t}_{(2)})$ ($0 < \beta < \pi$) sei ein Winkel zwischen dem Binormalenvektor im Punkte P_0 und im einem benachbarten Punkte $P(s_0 + \Delta s)$. Nach der Definition ist der absolute Wert der Torsion ein Grenzwert des Verhältnisses $\beta/\Delta s$ für $\Delta s \rightarrow 0$.

Wir haben nach (10)

$$\vec{t}_{(3)} - \vec{t}_{(3)}^0 = \lambda (\vec{\tau}_{(1)}^0 - \vec{\tau}_{(1)}),$$

also

$$|\vec{t}_{(3)} - \vec{t}_{(3)}^0| = \lambda |\vec{\tau}_{(1)}^0 - \vec{\tau}_{(1)}|.$$

Aber wegen (10) gilt $|\vec{\tau}_{(1)}^0 - \vec{\tau}_{(1)}| = \frac{1}{\gamma} |\vec{t}_{(1)} - \vec{t}_{(1)}^0|$ und damit $|\vec{t}_{(3)} - \vec{t}_{(3)}^0| = \frac{\lambda}{\gamma} |\vec{t}_{(1)} - \vec{t}_{(1)}^0|$.

Jedoch gilt

$$|\vec{t}_{(3)} - \vec{t}_{(3)}^0| = 2 \sin \beta / 2$$

und

$$|\vec{t}_{(1)} - \vec{t}_{(1)}^0| = 2 \sin \varphi / 2$$

wobei

$$\varphi = \sphericalangle (\vec{t}_{(1)}^0 - \vec{t}_{(1)}) \quad (0 < \varphi < \pi).$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\beta}{\Delta s} = \frac{\lambda}{\gamma} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\Delta s}.$$

Wegen $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \varphi / \Delta s = k_1$ erhalten wir schliesslich

$$(11) \quad k_2 = \frac{\lambda}{\gamma} \cdot k_1.$$

Wenn die Krümmung k_1 nicht verschwindet, so ergibt sich aus (11) $k_2/k_1 = \lambda/\gamma$. Aber λ und γ sind konstant und daher ist k_2/k_1 konstant, was zu zeigen war.