

Dynamika topologiczna i chaos

Wymagania wstępne: brak

Formuła nauczania: wykład 30 godzin, ćwiczenia 30 godzin

Metoda oceny/forma zaliczenia przedmiotu: egzamin ustny, opcjonalny egzamin pisemny

Język wykładowy: polski lub angielski

Prowadzący: Dominik Kwietniak

Treści kształcenia:

Kurs stanowi przegląd topologicznych aspektów teorii układów dynamicznych ze szczególnym uwzględnieniem układów z czasem dyskretnym i różnych definicji chaosu dla tych układów. Kurs obejmuje następujące tematy:

1. Okres trzy wywołuje chaos. Chaos w sensie Li i Yorke'a.

Historycznie pierwszą definicję chaosu dla przekształceń odcinka zwartego podali Li i Yorke w słynnej pracy z 1973. Przykład ten posłuży nam za motywację i będzie stanowił tło dla wprowadzenia/przypomnienia pewnych pojęć z teorii układów dynamicznych. Wzorując się na podejściu Li i Yorke'a podamy pierwszą definicję chaosu.

2. Podstawowe pojęcia i własności układów dynamicznych z czasem dyskretnym.

Orbity, punkty okresowe, zbiory graniczne, punkty powracające, niebłądzące i łańcuchowo rekurencyjne. Punkty i układy minimalne. Topologiczne sprzężenie. Faktory i rozszerzenia. Podukłady. Układy tranzytywne i wrażliwe na warunki początkowe. Chaos w sensie Auslander'a i Yorke'a.

3. Chaos w sensie Devaney'a.

Definicja chaosu w sensie Devaney'a. Twierdzenie o wrażliwości układów chaotycznych w sensie Devaney'a. Tranzytywność pociąga za sobą chaos dla przekształceń odcinka.

4. Elementy dynamiki symbolicznej.

Podstawowe definicje i własności związane z przesunięciem (shiftem) na przestrzeni ciągów nad alfabetem skończonym.

5. Topologiczne słabe mieszanie i mieszanie.

Twierdzenia Furstenberga, Furstenberga-Stacey'a i Iwanika (słabe mieszanie wywołuje chaos w sensie Li-Yorke'a). Przykłady przesunięć słabo mieszających, ale nie mieszających.

6. Układy regularne.

Przekształcenia okręgu. Homeomorfizmy okręgu. Grupy topologiczne. Układy

równociągłe i prawie równociągłe. Twierdzenie Halmosa-von Neumanna. Twierdzenie Glasnera-Weissa oraz wyniki Akina, Auslander'a i Berga o układach prawie równociągłych.

7. Układy minimalne.

Istnienie punktów minimalnych. Układy symboliczne Morse'a, Sturm'a i Toeplitza. Przykład Floyda-Auslander'a. Układy podstawieniowe. Twierdzenie o strukturze Furstenberga.

8. Entropia topologiczna.

Definicja i podstawowe własności entropii topologicznej.

9. Entropia topologiczna dla przesunięć i przekształceń odcinka.

Entropia jako miara wzrostu liczby słów języka. Entropia dla przesunięć typu skończonego. Entropia a podkowiny na odcinku. Entropia a cykle na odcinku. Entropia dla przekształceń kawałkami monotonicznych.

10. Układy ekspansywne.

Definicja i podstawowe własności układów ekspansywnych. Twierdzenie o generatorze. Charakterystyka układów symbolicznych.

11. Miary niezmiennicze.

Twierdzenie o istnieniu miary niezmienniczej. Entropia miarowa. Zasada wariacyjna.

12. Inne tematy (realizowane w zależności od zainteresowań słuchaczy i pozostałego czasu):

Dynamiczny dowód twierdzenia van der Waerdena i twierdzenie Furstenberga o wielopowracaniu; Teoria entropii (istnienie miary o entropii maksymalnej, układy ściśle ergodyczne i jednoznacznie ergodyczne, entropia ogonowa Misiurewicza i asymptotyczna h -ekspansywność, charakterystyka asymptotycznej h -ekspansywności w układach zero-wymiarowych); Entropia a pozostałe definicje chaosu; Elementy teorii ergodycznej; Chaos dystrybucyjny; Dynamika kombinatoryczna (tw. Szarkowskiego, kombinatoryczna teoria cykli); Dynamika hiperboliczna (śledzenie pseudo-orbit, zbiory hiperboliczne, podkowiny, tw. Smale'a o rozkładzie spektralnym); Elementy dynamiki zespolonej.

Zalecana literatura:

Literatura podstawowa:

1. M. Brin, G. Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge UP, Cambridge 2002.
2. R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Wydanie 2, Westview, Boulder 2003.
3. A. Katok, B. Hasselblatt, *A First Course in Dynamics*, Cambridge UP, Cambridge 2003.

4. A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge UP, Cambridge 1996.
5. D. Lind, B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

Literatura uzupełniająca:

1. K.T. Alligood, T.D. Sauer, J.A. Yorke, *Chaos: an introduction to dynamical systems*, Springer, New York 2000.
2. L. Alsedà, J. Llibre, M. Misiurewicz, *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, Wydanie drugie, World Scientific, River Edge 2000.
3. N. Aoki, K. Hiraide, *Topological theory of dynamical systems*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1994.
4. J. Auslander, *Minimal flows and their extensions*, Elsevier, Amsterdam 1988.
5. K. Ciesielski, Z. Pogoda, *Diamenty matematyki*, rozdz. 9-11, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.
6. M. Denker, Ch. Grillenberger, K. Sigmund, *Ergodic theory on compact spaces*, Lecture Notes in Mathematics 527, Springer-Verlag, Berlin-New York 1976.
7. N. Pytheas Fogg, *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*. Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel, Lecture Notes in Mathematics, 1794, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
8. B.P. Kitchens, *Symbolic dynamics. One-sided, two-sided and countable state Markov shifts*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin 1998.
9. J. Kudrewicz, *Fraktale i chaos*, WNT, Warszawa 1996.
10. K. Petersen, *Ergodic Theory*, Cambridge UP 1983.
11. M. Pollicott, M. Yuri, *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, Cambridge UP 1998.
12. I. Stewart, *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu*, PWN, Warszawa 2001.
13. P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag 1982.